

bei ist jedoch zu berücksichtigen, daß der Gesamtaufwand einer Anlage bei vorgegebener Menge und Konzentration des Produktes wesentlich von den Ansaugdrücken  $p_F$  und  $p_G$  sowie von den Kompressionsverhältnissen  $p_B/p_F$  und  $p_B/p_G$  abhängt. Für eine vollständige Optimalrechnung ist daher eine genaue Kenntnis der zu verwendenden Pumpen erforderlich.

Die Bestimmung der Isotopenhäufigkeiten mit dem C.E.C.-Massenspektrometer wurde von Herrn Dipl.-Phys. W. Beyrich durchgeführt. Bei einem Teil der Versuche hat uns Herr Dipl.-Phys. F. Zigan geholfen. Herrn Prof. Dr. W. Walcher danken wir für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sind wir für Sachbeihilfen zu Dank verpflichtet.

## Über die schweren Kerne in der primären kosmischen Strahlung

Von H. FAY

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. **10a**, 572—581 [1955]; eingegangen am 28. Mai 1955)

The present paper describes the results of an investigation on heavy nuclei ( $Z > 2$ ) of the primary cosmic radiation. The measurements were made in 40 stripped emulsions flown over Sardinia ( $\lambda \sim 40^\circ$ ) in a height of about 27 km for 7 hours. The energy of the nuclei was deduced from their multiple Coulomb scattering, and, if they fragmented, from the opening angles of their secondary products. For the determination of the charge number  $Z$  the measurement of the  $\delta$ -ray density was sufficient, all particles having energies/nucleon  $\geq 1,3$  GeV. The result is thus independent of possible influences of spurious scattering.

The charge spectrum under an average of 32 g/cm<sup>2</sup> of residual material shows that the number of nuclei with  $3 \leq Z \leq 5$  is approximately equal to that of nuclei with  $6 \leq Z \leq 9$ . This is in agreement with the charge spectrum found by Dainton, Fowler, and Kent, but at variance with the results of Bradt and Peters. The magnitude of the correction to be applied for the scanning loss of Li-nuclei is discussed. The correction factor used by Dainton et al. appears to be too high. With regard to the influence of the residual material it is shown that the calculated intensity of the Li-, Be-, and B-nuclei at the top of the atmosphere will be strongly affected by the uncertainty of the probabilities  $p_k^i$  for fragmentation. The fragmentation probabilities found in this work are in good agreement with those obtained by Bradt and Peters and by Gottstein, they are, however, somewhat smaller than those measured by Noon, Kaplon, and Ritson. The values of the mean free paths in emulsion can be represented by a formula for the cross-sections given by Peters et al.

The energy spectrum agrees with that deduced by Kaplon et al. from measurements of the latitude-effect. It was found that because of spurious scattering cell lengths of at least 4 mm are required in order to measure energies  $> 4$  GeV/nucleon. A spectrum similar to that found by Dainton et al. is obtained, if one confines the scattering measurements on cells which are not long enough. The flux of nuclei  $Z \geq 6$  at the top of the atmosphere is somewhat smaller than measured by other authors at  $\lambda = 41^\circ$ .

Die Untersuchung des Ladungsspektrums der schweren Kerne ( $Z \geq 3$ ) in der primären kosmischen Strahlung wird dadurch erschwert, daß die einfallenden Kerne in der Restatmosphäre zu einem gewissen Teil durch Kernstöße in leichtere Restkerne aufgespalten werden. Will man daher die am Meßort erhaltenen Ergebnisse auf den Gipfel der Atmosphäre extrapolieren, so benötigt man dazu die Werte der mittleren freien Weglängen  $L_i$  der Kernsorte  $i$  in Luft und der Wahrscheinlichkeiten  $p_k^i$ , mit denen beim Stoß eines Kernes der Sorte  $k$  ein Restkern der Sorte  $i$  entsteht. Da die leichten Kerne Li, Be, B häufig als Restkerne auftreten, ist bei der Bestimmung ihrer primären Häufigkeit eine entsprechende Korrektur von entschei-

dender Bedeutung. Die Werte der  $p_k^i$  in Luft sind heute jedoch noch nicht genügend genau bekannt, so daß die extrapolierten Flußwerte unsicher bleiben.

Aber selbst die Ergebnisse der direkten Messungen unter 15—20 g/cm<sup>2</sup> Restatmosphäre sind nicht bei allen Autoren in Übereinstimmung. So fanden Bradt und Peters<sup>1</sup> einen Fluß der Li-, Be- und B-Kerne, der wesentlich kleiner ( $< 20\%$ ) als der der C-, N-, O-, F-Kerne war und der vollständig erklärt werden konnte als herrührend aus Aufspaltungen schwererer Kerne in der Restatmosphäre.

<sup>1</sup> H. L. Bradt u. B. Peters, Phys. Rev. **80**, 943 [1950].



Im Gegensatz dazu ergab sich bei den Messungen von Dainton, Fowler und Kent<sup>2</sup> und von Gottstein<sup>3</sup> (beide Arbeiten wurden allerdings — wenn auch mit teilweise verschiedenen Methoden — an demselben Plattenpaket durchgeführt) der Fluß der Li-, Be-, B-Kerne zu ungefähr der gleichen Größe wie derjenige der C-, N-, O-, F-Kerne. Dieses Ergebnis wird durch die Arbeiten von Kaplon, Noon, Racette<sup>4</sup> und Hourd, Fleming, Lord<sup>5</sup> bestätigt; jedoch erhalten die Autoren infolge der Verwendung größerer Werte für die Spaltwahrscheinlichkeiten  $p_k^i$  kleinere Primärintensitäten der Li-, Be-, B-Kerne. Die Messungen bezüglich der relativen Häufigkeit der Kerne mit  $Z \geq 6$  stimmen dagegen bei allen Autoren weitgehend überein.

Auch hinsichtlich des Energiespektrums der schweren Kerne sind die Messungen der einzelnen Autoren nicht in Übereinstimmung. Zwar scheint es festzustehen, daß das Geschwindigkeitsspektrum (Energiespektrum pro Nukleon der schweren Kerne) für alle Kerne  $Z \geq 2$  unabhängig von Masse und Ladung ist<sup>2,6</sup>, jedoch fanden Dainton et al.<sup>2</sup> und Gottstein<sup>3</sup> (der allerdings nur untere Grenzen angibt) einen nur etwa halb so großen Anteil der Kerne mit Energien über 1 GeV/Nukl., als man nach den von Kaplon et al.<sup>6</sup> durchgeführten Messungen des Breiteneffektes erwarten sollte.

In der vorliegenden Arbeit sind die Ergebnisse einer in kernphotographischen Emulsionen durchgeführten systematischen Untersuchung über die schweren Kerne zusammengefaßt. Die verwendeten Emulsionen wurden im Sommer 1953 im Laufe einer internationalen Expedition auf Sardinien (geomagnetische Breite  $\sim 40^\circ$ ) mit Hilfe von Freiballonen in etwa 27 km Höhe exponiert. Das Emulsionspaket bestand aus 40 Emulsionsschichten (stripped emulsions) Ilford G-5,  $10 \times 15$  cm,  $600 \mu$  dick, die in Form eines Quaders von  $10 \times 15 \times 2,5$  cm aufeinandergeschichtet waren. Zwischen je zwei Schichten lag ein Blatt Reispapier von  $35 \mu$  Dicke. Die Ausrichtung des Emulsionblockes war so, daß die langen Kanten mit der Vertikalrichtung zusammenfielen.

Die Durchmusterung (Objektiv  $\times 25$ , Okular  $\times 6$ ) der einzelnen Emulsionsschichten geschah in der Weise, daß längs des Randes einer jeden Schicht drei Zeilen von je einer Gesichtsfeldbreite ( $600 \mu$ ) auf Spuren un-

tersucht wurden, deren Korndichte mehr als das siebenfache der Minimumkorndichte betrug und die länger als  $5000 \mu$  waren. Der Zeilenabstand war 1 cm, die erste Zeile lag 5 mm vom Rand entfernt. Bei diesem Verfahren sollten alle Spuren länger als  $5000 \mu$  und mit einer  $\delta$ -Strahldichte  $\geq 1$  (entspricht relativistischen Li-Kernen) erfaßt werden. Bei der späteren Auswertung wurde berücksichtigt, daß einige Kerne bereits in dem 5 mm breiten Streifen zwischen Emulsionsrand und erster Durchmusterungszeile aufgespalten und daher der Beobachtung entgangen sein können.

### I. Das Ladungsspektrum der schweren Kerne unter $32 \text{ g/cm}^2$ Restmaterie

Zur Bestimmung der Ladung eines schweren Kernes wurden nach Dainton, Fowler und Kent<sup>2</sup> die Anzahl der  $\delta$ -Strahlen pro  $100 \mu$  Spurlänge ( $N_\delta$ ) und der mittlere Streuwinkel  $\bar{\alpha}$  gemessen. Dabei wurden als  $\delta$ -Strahlen alle Spuren von Anstoßelektronen mit vier oder mehr Körnern gezählt. Zur Messung des mittleren Streuwinkels wurde die Koordinatenmethode<sup>7,8</sup> verwendet. Zur Eichung wurden zunächst Messungen an langsamen  $\alpha$ -Teilchen ausgeführt, die aus Streuung, Korndichte und Reichweite als solche identifiziert werden konnten. Es ergab sich gute Übereinstimmung mit den von Dainton et al. gefundenen  $\delta$ -Strahldichten. Da im Falle der in dieser Arbeit zu untersuchenden Primärspuren die geomagnetische Abschneideenergie für senkrechten Einfall  $\sim 1,6 \text{ GeV/Nukl.}$  betrug, ist die  $\delta$ -Strahldichte der registrierten Kerne (mit Ausnahme von einigen langsamen Bruchstücken) von der Geschwindigkeit und damit von  $\bar{\alpha}$  unabhängig.

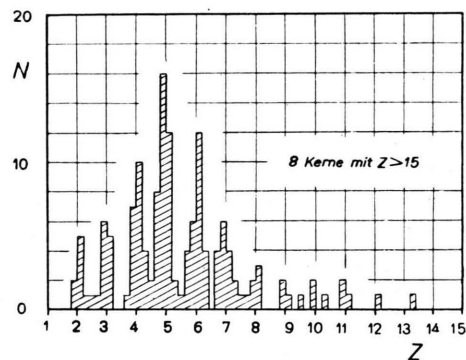


Abb. 1. Das Ladungsspektrum der schweren Kerne unter einer restlichen Materieschicht von  $32 \text{ g/cm}^2$  Luftäquivalent. Die acht Kerne mit  $Z > 15$  sind je zwei Kerne von  $Z = 16 \pm 2$  und  $Z = 19 \pm 2$  sowie je ein Kern von  $Z = 20 \pm 2$ ,  $Z = 21 \pm 2$ ,  $Z = 22 \pm 2$  und  $Z = 26 \pm 3$ .

<sup>2</sup> A. D. Dainton, P. H. Fowler u. D. W. Kent, Phil. Mag. **43**, 729 [1952].

<sup>3</sup> K. Gottstein, Phil. Mag. **45**, 347 [1954].

<sup>4</sup> M. F. Kaplon, J. H. Noon u. G. W. Racette, Phys. Rev. **96**, 1408 [1954].

<sup>5</sup> R. F. Hourd, J. R. Fleming u. J. J. Lord, Phys. Rev. **95**, 647 [1954].

<sup>6</sup> M. F. Kaplon, B. Peters, H. L. Reynolds u. D. M. Ritson, Phys. Rev. **85**, 295 [1952].

<sup>7</sup> K. Gottstein, M. G. K. Menon, J. H. Mulvey, C. O'Ceallaigh u. O. Rochat, Phil. Mag. **42**, 708 [1951].

<sup>8</sup> K. Gottstein, Anhang 3 in: W. Heisenberg, Kosmische Strahlung, Springer 1953.

Die Abb. 1 zeigt das aus 153 Primärspuren erhaltene Ladungsspektrum ( $Z$  wurde jeweils auf 0,2 Einheiten abgerundet). Man erkennt in der guten Auflösung des Histogramms (scharfe Spitzen für ganzzahlige Werte von  $Z$ ) einen Hinweis für die Richtigkeit der Meßmethode. Das Häufigkeitsverhältnis der Be- und B-Kerne zu den Kernen mit  $6 \leq Z \leq 9$  ist ungefähr gleich 1. Die im Mittel von jedem Kern durchlaufene Materialschichtdicke beträgt  $32 \text{ g/cm}^2$  Luftäquivalent.

## II. Längenverteilung der Spuren und Durchmusterungsverlust

Die theoretische Längenverteilung der in einem Emulsionsblock registrierten Spuren ist unter der Annahme, daß der Fluß der Kerne isotrop über den oberen Halbraum ist, gegeben durch

$$N(L) dL = \text{const} (1 + kL) \frac{dL}{L^3}.$$

Hierin ist  $L$  die Länge der Spuren pro Emulsionschicht und  $k$  eine Konstante, die nur von den Abmessungen des Emulsionsblockes abhängt. Für eine einzelne Emulsionsschicht (Dicke sehr klein gegen lineare Abmessungen) ist  $k=0$ .

In Abb. 2 ist die experimentell gefundene Längenverteilung der Spuren mit  $L \geq 5000 \mu$  für die Be-, B-Kerne und die Kerne  $Z \geq 6$  angegeben. Die gute Übereinstimmung von gemessener und theoretischer Verteilung beweist, daß diese Kerne vollständig erfaßt worden sind. Das ergibt sich auch aus der Tatsache, daß die Spuren von Kernen mit  $Z \geq 4$  im Laufe der Durchmusterung sowohl beim Eintritt in den Emulsionsblock als auch beim Austritt unabhängig voneinander beobachtet wurden.

Für die Li-Kerne konnte der Durchmusterungsverlust nicht aus der Längenverteilung der Li-Spuren ermittelt werden, da die Güte der Statistik infolge der geringen Zahl von gefundenen Li-Spuren (12) zu klein ist. Es wurde daher jede Li-Spur durch den gesamten Emulsionsblock hindurch verfolgt und die Zahl der von ihr durchlaufenen Durchmusterungszeilen festgestellt. Aus der Anzahl der bei der systematischen Durchmusterung wirklich gefundenen Fälle ergibt sich dann mit guter Näherung die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Li-Spur beim Durchlaufen einer (einzigen) Durchmusterungszeile beobachtet worden ist, zu

$$p = \frac{\text{Anzahl der beobachteten Fälle}}{\text{Anzahl der durchlaufenen Zeilen}} = 0,5 \pm 0,2.$$

(Im Falle der Be-Kerne ist  $p$  bereits 0,8.) Da im Mittel von jeder Spur fünf Durchmusterungszeilen durchlaufen wurden, erhält man als Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, daß eine Li-Spur überhaupt beobachtet wurde

$$P = \sum_{n=1}^5 \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n},$$

wo  $N=5$  und  $n$  die Zahl der beobachteten Fälle ist. Man erhält  $P > 0,9$ . Der Durchmusterungsverlust an Li-Spuren ist somit kleiner als 10%.

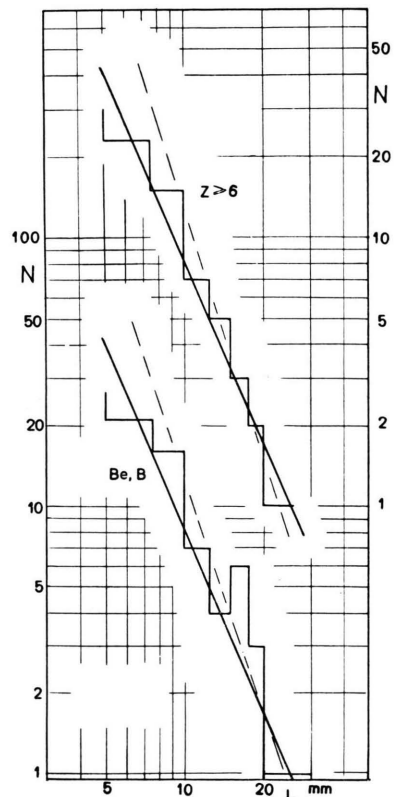


Abb. 2. Die Längenverteilung der Be-, B-Spuren und der Spuren mit  $Z \geq 6$ . Die ausgezogene Gerade ist das theoretische Verteilungsgesetz für den verwendeten Emulsionsblock. Die gestrichelte Gerade gilt für eine einzelne Emulsionsschicht ( $k=0$ ).

Einen bedeutend größeren Wert für  $P$  erhält man, wenn man den Durchmusterungsverlust auf dieselbe Weise wie Dainton et al.<sup>2</sup> abschätzt: Nimmt man nach Kaplon et al.<sup>6</sup> an, daß das Geschwindigkeitsspektrum der schweren Kerne unabhängig von Masse und Ladung ist, so sollte das Häufigkeitsverhältnis  $q$  von Li-Kernen zu Be- und B-Kernen für relativistische Energien dasselbe

sein wie für Energien  $\leq 450$  MeV/Nukl. Für diese niedrigen Energien läßt sich  $q$  genau bestimmen, da infolge der erhöhten  $\delta$ -Strahldichte ( $\geq 1,5/100\mu$ ) die Li-Kerne bei der Durchmusterung kaum mehr übersehen werden. In der vorliegenden Arbeit war die Messung von  $q$  wegen der geomagnetischen Abschneideenergie von 1,6 GeV/Nukl. nicht möglich. Wir verwenden daher probeweise den von Dainton et al.<sup>2</sup> erhaltenen Wert  $q=0,64$ . Insgesamt wurden 62 Be- und B-Kerne gefunden. Also sollte die wahre Zahl der Li-Kerne  $0,64 \cdot 62 = 40$  und damit gleich der Zahl der Be-Kerne (39) sein, ein Ergebnis, das auch Dainton et al. erhalten. Von diesen 40 Li-Kernen wurden nur zwölf gefunden, so daß der Durchmusterungsverlust  $\sim 70\%$  betragen müßte (60% bei Dainton et al.).

Dieser sehr viel größere als auf direktem Wege gewonnene Durchmusterungsverlust läßt vermuten, daß die von Dainton et al. durchgeführte Korrektur für übersehene Li-Kerne zu groß ausfällt. Die Ursache für die Diskrepanz kann in folgendem liegen: Das Verhältnis  $q=0,64$  wurde unter einer Restatmosphäre von  $\sim 20$  g/cm<sup>2</sup> gemessen. Von den dort gefundenen Li-, Be- und B-Kernen stammt ein bestimmter und nicht vernachlässigbarer Anteil aus Aufspaltungen schwererer Kerne in der Restatmosphäre. Die Größe dieses Anteils ist durch die Spaltwahrscheinlichkeiten  $p_k^{\text{Li}}$ ,  $p_k^{\text{Be}}$ ,  $p_k^{\text{B}}$  bestimmt, mit denen Li-Kerne, bzw. Be- oder B-Kerne bei der Zertrümmerung schwererer Kerne  $k$  als Restkerne entstehen. Da aber die Spaltwahrscheinlichkeiten energieabhängig sind (s. z. B.<sup>15</sup>), kann das bei Energien  $\leq 450$  MeV/Nukl. gemessene Verhältnis  $q$  nicht ohne weitere Korrektur für Energien  $> 1$  GeV/Nukl. verwendet werden. Wie diese Korrekturen allerdings vorgenommen werden müssen, kann aus den heute vorliegenden Messungen nicht entschieden werden.

### III. Die Richtungsverteilung der schweren Kerne

Infolge der Rotationen des Ballons und des Plattenpaketes wird bereits während der Exposition die Intensität der schweren Kerne über den Azimutwinkel gemittelt, so daß sich geomagnetisch bedingte Asymmetrien in der Intensität nicht bemerkbar machen können. Man kann daher die Intensität der schweren Kerne am Gipfel der Atmosphäre als isotrop über den oberen Halbraum ansetzen. Wird mit  $\vartheta$  der auf die Plattenebene projizierte Winkel zwischen Spurrichtung und Vertikal-

richtung bezeichnet (Vertikalrichtung  $\vartheta=0$ ), und war das Plattenpaket während der Exposition gleichmäßig von Materie umgeben, so muß die Zahl der Spuren mit einem Einfallswinkel  $\vartheta>0$  gleich der der Spuren mit  $\vartheta<0$  sein. Dies ist in der vorliegenden Arbeit nicht der Fall, sondern

$$\frac{N(\vartheta > 0)}{N(\vartheta < 0)} = 2,1 \pm 0,5 \quad \text{für Li-, Be-, B-Kerne,}$$

$$\frac{N(\vartheta > 0)}{N(\vartheta < 0)} = 2,5 \pm 0,6 \quad \text{für C-, N-, O-, F-Kerne.}$$

Hinsichtlich der Kerne mit  $Z \geq 10$  kann wegen des zu geringen statistischen Gewichtes nichts ausgesagt werden.

Wir müssen daher annehmen, daß sich an der durch  $\vartheta<0$  bezeichneten Seite des Plattenpaketes ohne unser Wissen eine größere Materiemenge befunden hat, in der ein Teil der Primärkerne absorbiert worden ist. Mit den in Abschn. V angegebenen Stoßweglängen ergibt sich für die in Frage stehende Materiemenge aus beiden Verhältnissen übereinstimmend eine mittlere Schichtdicke von 24 g/cm<sup>2</sup>. Eine mögliche Erklärung wäre etwa die, daß sich während des Fluges eine der Drucksonden, die zur Höhenmessung dienen, oder anderes Hilfsgerät neben das Plattenpaket gelegt hat.

Da somit die von den Kernen mit  $\vartheta<0$  durchlaufenen Schichtdicken sehr unsicher sind, werden wir bei der Berechnung des Flusses der verschiedenen Kernsorten am Gipfel der Atmosphäre nur die Spuren mit  $\vartheta>0$  verwenden (Abschnitte VI und VII).

### IV. Das Energiespektrum der schweren Kerne

Zur Ableitung des Energiespektrums wurde die Energie jedes Primärkernes (soweit seine Spur mehr als 20 mm vom Emulsionsrand entfernt im Inneren der Platte lag) aus dem Streuwinkel  $\bar{\alpha}$  und, wenn der Kern bei einem Stoß in drei oder mehr  $\alpha$ -Teilchen oder identifizierbare Protonen aufgespalten wurde, aus dem mittleren Öffnungswinkel dieser Bruchstücke berechnet.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem aus  $\bar{\alpha}$  erhaltenen Wert des Produktes  $pv=(pv)_0$  ( $p$  Impuls,  $v$  Geschwindigkeit des Teilchens, s. z. B. Gl. (12) bei Gottstein<sup>8</sup>) der wahre Wert von  $pv$  kleiner als  $(pv)_1$  ist, ergibt sich unter Verwendung der Moliereschen Theorie<sup>9</sup> zu

<sup>9</sup> G. Moliere, Z. Naturforschg. **2a**, 133 [1947]; **3a**, 78 [1948].



$$P\{(pv)_0, (pv)_1\} = C \int_0^{(pv)_1} (pv)^n \exp\left[-\frac{n}{2} \frac{(pv)^2}{(pv)_0^2}\right] d(pv).$$

In Abb. 3 ist  $P$  als Funktion von  $q = (pv)_1/(pv)_0$  für verschiedene Anzahlen  $n$  der unabhängigen Zellen aufgetragen.

In Abb. 4 ist für drei bzw. vier sekundäre  $\alpha$ -Teilchen die Wahrscheinlichkeit aufgetragen, mit der bei einer aus dem mittleren Öffnungswinkel der Bruchstücke ermittelten Energie  $E'$  (s. z. B. Gl. (8) bei Peters<sup>10</sup>) die wahre Energie des Primärkernes größer als  $E$  ist. Die Kurven wurden durch gra-

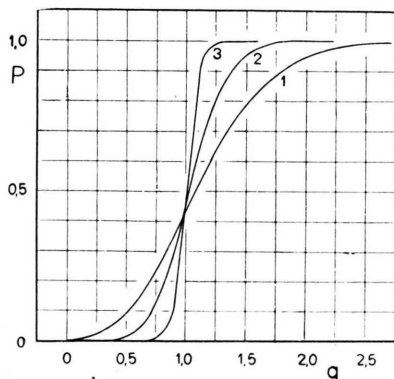


Abb. 3. Die Kurven stellen die Wahrscheinlichkeit  $P$  dar, mit der bei einem aus dem mittleren Streuwinkel  $\bar{\alpha}$  erhaltenen Wert von  $(pv)_0$  der wahre Wert des Produktes kleiner als  $(pv)_1 = q \cdot (pv)_0$  ist, und zwar für  $n=2$  (Kurve 1),  $n=8$  (Kurve 2) und  $n=64$  (Kurve 3) unabhängigen Zellen.

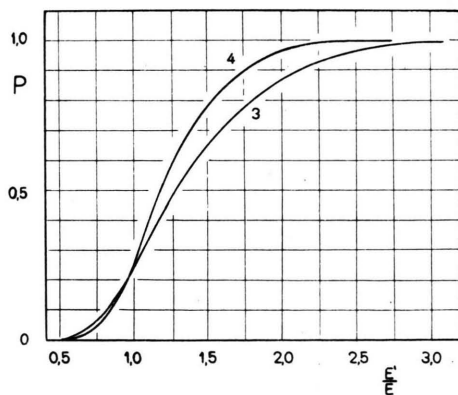


Abb. 4. Die Kurven geben für Fragmentierungsschauer von drei bzw. vier  $\alpha$ -Teilchen die Wahrscheinlichkeiten  $P$  dafür an, daß bei einer aus dem Öffnungswinkel der  $\alpha$ -Teilchen ermittelten Energie  $E'$  die wahre Energie größer als  $E$  ist.

<sup>10</sup> B. Peters, The Nature of Primary Cosmic Radiation in: J. G. Wilson, Progress in Cosmic Ray Physics, Amsterdam 1952.

phische Integration der von Kaplon et al.<sup>6</sup> angegebenen differentiellen Verteilungen erhalten. Man erkennt, daß die Energie eines Teilchens zwar erheblich überschätzt, aber niemals um mehr als die Hälfte unterschätzt werden kann.

An Hand der Abb. 3 und 4 wurden für jeden Kern  $v$  die Wahrscheinlichkeiten  $w_v(>E_i)$  dafür bestimmt, daß seine Energie größer als  $E_i$  ist ( $E_i = 1,5; 2; 3; 5$  GeV/Nukl.). Dabei wurde der Energieverlust in der Restatmosphäre berücksichtigt. Die mittlere Anzahl  $n(>E_i)$  der Kerne mit Energien  $>E_i$  am Gipfel der Atmosphäre ist dann durch

$$n(>E_i) = \sum_{v=1}^N w_v(>E_i) \quad (N \text{ Gesamtzahl der Kerne})$$

gegeben. In der Tab. 1 sind die Ergebnisse für drei verschiedene Spurlängen zusammengefaßt, und zwar, wenn  $L$  die Länge einer Spur pro Platte bedeutet, für Spuren mit  $L \geq 20$  mm, für solche mit  $15 \leq L < 20$  mm und für Spuren mit  $10 \leq L < 15$  mm. Man erkennt, daß der Anteil der energiereichen Kerne bei abnehmender Spurlänge scheinbar kleiner wird. So ist die Häufigkeitsabnahme der Kerne mit  $E > 5$  GeV/Nukl. bereits bei Spurlängen zwischen 15–20 mm deutlich ausgeprägt, für Kerne mit  $E > 3$  GeV/Nukl. dagegen erst bei 10–15 mm, während das Verhältnis  $n(>2)/n(>1,5)$  in allen drei Gruppen nahezu konstant bleibt.

	Spurlängen $L > 20$ mm	Spurlängen $15 \leq L < 20$	Spurlängen $10 \leq L < 15$	nach Peters et al.	nach Dainton et al.
$\frac{n(>2)}{n(>1,5)}$	$0,9 \pm 0,07$	$0,80 \pm 0,11$	$0,70 \pm 0,12$	0,80	0,67
$\frac{n(>3)}{n(>1,5)}$	$0,64 \pm 0,11$	$0,56 \pm 0,14$	$0,33 \pm 0,12$	0,57	0,34
$\frac{n(>5)}{n(>1,5)}$	$0,33 \pm 0,10$	$0,15 \pm 0,11$	$0,10 \pm 0,08$	0,35	0,13
$N$	22	12	16		

Tab. 1. Häufigkeit der Primärspuren verschiedener Länge und Energie.

In den zwei letzten Spalten der Tabelle sind die entsprechenden Häufigkeitsverhältnisse angegeben, die sich aus den Spektren von Peters et al.<sup>6,10</sup> und von Dainton et al.<sup>2</sup> ergeben. Während das von Peters vorgeschlagene Spektrum im wesentlichen auf Messungen des Breiteneffektes beruht, leiteten Dainton et al. ihre Form aus Streumessungen in photographischen Emulsionen ab. Wie die Tabelle zeigt, stimmt das für Spuren länger als 20 mm erhaltene Energiespektrum mit dem von Peters et al. überein, für die kürzeren Spuren dagegen mit dem von Dainton et al.

Um eine Erklärung für dieses Ergebnis zu finden, wurden die zu verschiedenen Zellenlängen gehörenden zweiten Differenzen  $\bar{D}$  über alle Spuren einer Längengruppe gemittelt. In Abb. 5 sind die so erhaltenen  $\bar{D}$ -Werte als Funktion der Zellenlänge für verschiedene Spurguppen dargestellt. Die Gruppen sind dabei im Anschluß an eine Arbeit von Peters et al.<sup>14</sup>, \* folgendermaßen gewählt:

Gruppe A:  $8 < \cotg \varphi \leq 12$  entspr.  $4800 < L \leq 9600 \mu$   
 B:  $12 < \cotg \varphi \leq 20$   $9600 < L \leq 16000 \mu$   
 C:  $20 < \cotg \varphi \leq 30$   $16000 < L \leq 24000 \mu$   
 D:  $30 < \cotg \varphi$   $24000 < L$   $\mu$

( $\varphi$  Tauchwinkel der Spur,  $L$  projizierte Spurlänge pro Emulsionsschicht). Da die Energien der ver-

gemessenen unechten  $\bar{D}$ -Werten gut überein. Dies bestätigt den von Peters erhaltenen Befund, daß die lokalen Verzerrungen der Emulsion, die für die gefundene unechte Streuung (spurious scattering) verantwortlich zu machen sind, unabhängig vom Emulsionstyp und Entwicklungsprozeß und im Mittel immer gleich groß sind.

Aus dem Verlauf der unechten  $\bar{D}$ -Werte für Zellenlängen  $> 1000 \mu$  ergibt sich, daß Energien über 4–5 GeV/Nukl. im Mittel erst in Zellenlängen größer als  $4000 \mu$  meßbar werden. Dies erfordert eine Mindestlänge der Spur von etwa  $20000 \mu$ . Nur aus Messungen an Spuren dieser Länge kann das Energiespektrum bis zu Energien von 5 GeV/Nukl. richtig erhalten werden.

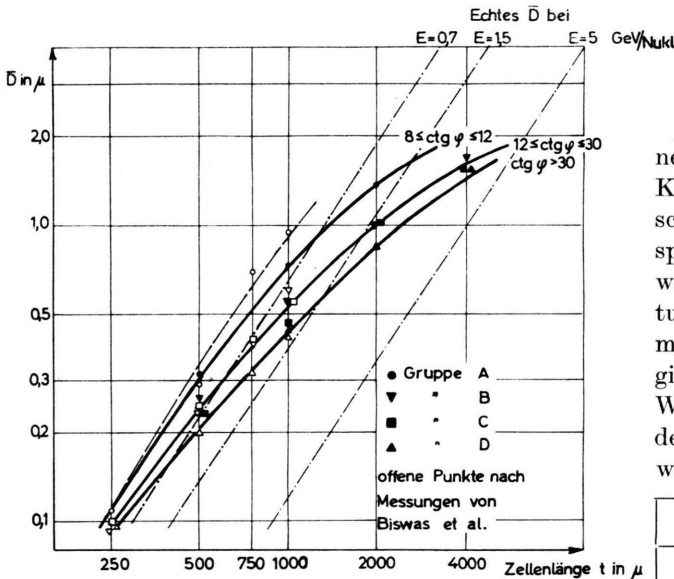


Abb. 5. Das unechte  $\bar{D}$  (spurious scattering) als Funktion der Zellenlänge  $t$  für Spuren verschiedener Neigung in der Emulsion. Wegen der Gruppeneinteilung A, B, C, D siehe Text. Die gestrichelt gezeichneten Geraden stellen den Verlauf des echten  $\bar{D}$ -Wertes bei Energien von 0,7, 1,5 und 5,0 GeV/Nukl. dar.

messenen Spuren wegen des geomagnetischen „cut-off“ größer als  $\sim 1,5$  GeV/Nukl. sind, dürfte das mittlere echte  $\bar{D}$  aller Spuren höchstens auf der eingezeichneten Geraden  $E = 1,5$  GeV/Nukl. liegen. Die in Zellenlängen bis  $1000 \mu$  an Spuren aller Längengruppen gemessenen  $\bar{D}$ -Werte sind jedoch ausnahmslos größer und stimmen mit den von Peters<sup>14</sup> an Spuren mit Energien  $\geq 5$  GeV/Nukl.

\* Wir danken Prof. Peters für die Übersendung des Manuskripts.

## V. Mittlere freie Weglängen und Spaltwahrscheinlichkeiten

1. Als Stoßweglänge  $L_s$  sei die Strecke bezeichnet, die ein schwerer Kern im Mittel bis zu einem Kernstoß durchläuft, bei dem mindestens eine schwarze, graue oder dünne Spur von der Primärspur abzweigt. Entsprechend sei die Absorptionsweglänge  $L_a$  die mittlere Strecke bis zur Aufspaltung des Kernes (Erniedrigung seiner Ladung um mindestens eine Einheit) (Abb. 6 und 7). Die Tab. 2 gibt die für verschiedene Kernsorten gemessenen Weglängen. Für die Dichte der Emulsion wurde der von Ilford angegebene Wert  $3,91 \text{ g/cm}^3$  verwendet.

Z	Stoßweglänge $L_s \text{ g/cm}^2$	Absorptionsweglänge $L_a \text{ g/cm}^2$	$L_a$ nach Peters
3	(310)	(310)	68
4	$78 \pm 25$	$98 \pm 35$	59
5	$58 \pm 14$	$66 \pm 18$	56
6	$50 \pm 13$	$54 \pm 15$	51
7	$150 \pm 86$	(150)	48
$Z = 8-9$ }	$43 \pm 16$	$43 \pm 16$	45
$Z = 8,5$ }			
$Z \geq 10$ }	$29 \pm 9$	$29 \pm 9$	35,5
$Z = 15,3$ }			

Tab. 2. Stoß- und Absorptionsweglängen für verschiedene Kernsorten. Als Fehler wurden  $L/\sqrt{n}$  angegeben ( $n$  Anzahl der Stöße).

In der letzten Spalte sind Werte für  $L_a$  angeführt, die nach einer von Peters et al. angegebenen Formel für den Wirkungsquerschnitt (s. z.B. Gl. (5) bei Peters<sup>10</sup>) errechnet wurden. Dabei wurde die von Ilford angegebene Zusammensetzung der Emulsion zugrunde gelegt. Mit Ausnahme der Li- und N-Kerne ( $Z = 3$  und  $Z = 7$ ) stimmen innerhalb der statistischen Fehler die gemessenen Werte mit den berechneten überein. Ob die Abweichungen im

Fälle der Li- und N-Kerne tatsächlich reell sind, kann erst durch weitere Messungen geklärt werden. Wir verwenden daher die genannte Formel zur Berechnung der in den Abschnitten VI und VII benötigten Absorptionsweglängen in Luft und erhalten die in Tab. 3 zusammengestellten Werte.

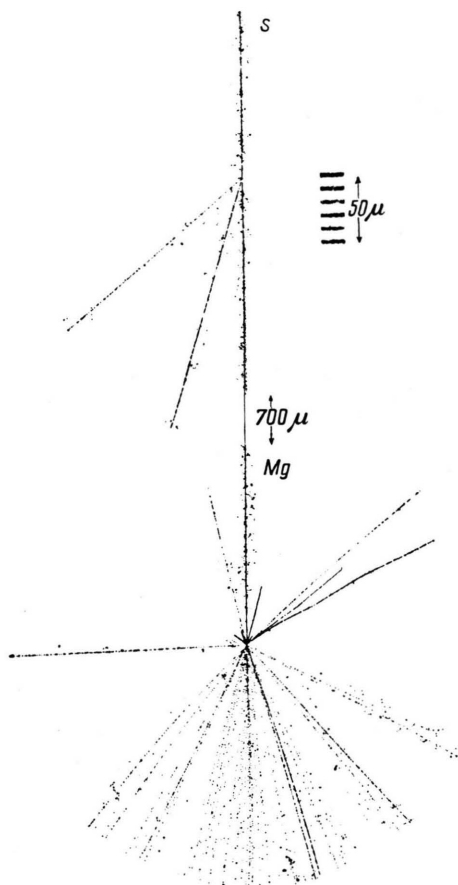


Abb. 6. Ein Schwefelkern ( $Z=16$ ) wird beim Stoß an einem Kern der Emulsion in einen Magnesiumkern ( $Z=12$ ), zwei Protonen und ein  $\alpha$ -Teilchen aufgespalten. Nach einer Strecke von  $\sim 1000 \mu$  wird der Magnesiumkern in derselben Emulsionsschicht vollständig zertrümmert. Dabei treten insgesamt acht „schwarze“, fünf „graue“ und zwanzig „dünne“ Spuren auf.

Li, Be, B	$\bar{Z} = 4$	$L_a = 33,0 \text{ g/cm}^2$
C, N, O, F	$\bar{Z} = 7$	$L_a = 26,0 \text{ g/cm}^2$
$Z \geq 10$	$\bar{Z} = 15$	$L_a = 19,0 \text{ g/cm}^2$

Tab. 3. Mittlere freie Absorptionsweglänge in Luft.

2. Die Spaltwahrscheinlichkeit  $p_k^i$  ist die Wahrscheinlichkeit, mit der bei der Aufspaltung eines Kernes der Sorte  $k$  ein Restkern der Sorte  $i$  entsteht (Abb. 6). Berücksichtigt man nur solche Er-

eignisse, bei denen die Zahl der schwarzen und grauen Verdampfungsspuren des getroffenen Kernes kleiner als 9 ist (entspricht einem Stoß an den leichten Emulsionskernen H, C, N, O oder einem „streifenden“ Stoß an den schweren S, Br, Ag, J), so erhält man, wenn man die Li-, Be-, B-Kerne als A-Kerne, die C-, N-, O-, F-Kerne als B-Kerne und die Kerne mit  $Z \geq 10$  als C-Kerne bezeichnet (Peterssche Nomenklatur)

$$\begin{aligned} p_{\text{Be, Bor}}^A &= 0,29 \pm 0,11; & p_B^A &= 0,22 \pm 0,10; \\ p_C^A &= 0,20 \pm 0,18; & p_{B+C}^A &= 0,22 \pm 0,09; \\ p_B^B &= 0,11 \pm 0,06; & p_C^B &= 0,20 \pm 0,18; \\ p_{B+C}^B &= 0,13 \pm 0,05; & p_C^C &= 0,20 \pm 0,18. \end{aligned}$$

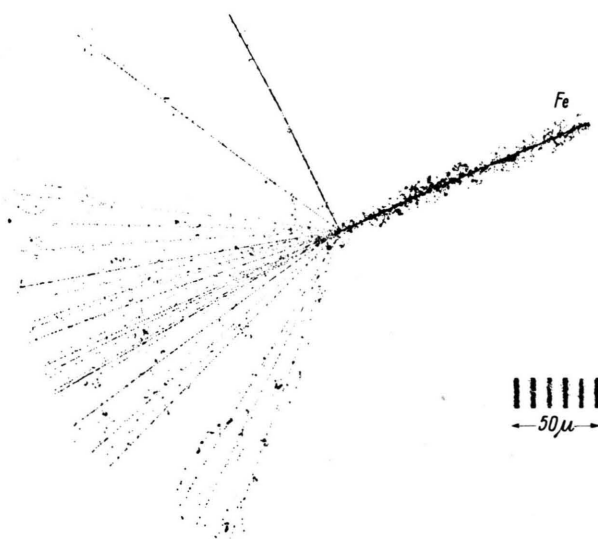


Abb. 7. Ein Kern der Eisengruppe ( $Z=26 \pm 3$ ) wird vollständig aufgespalten. Es sind neunzehn „dünne“, neun „graue“ und eine „schwarze“ Spur sichtbar.

Diese Werte stimmen innerhalb der statistischen Fehler mit den von Bradt und Peters<sup>1</sup> in Glas und von Gottstein in Emulsion ( $L$ -Ereignisse) erhaltenen Spaltwahrscheinlichkeiten gut überein. Sie sind dagegen kleiner als die Werte von Noon, Kaplon und Ritson<sup>11</sup>.

In Tab. 4 sind für die  $p_B^A$ ,  $p_C^A$  und  $p_{B+C}^A$  die Ergebnisse der genannten Autoren zusammengestellt. Die Reihenfolge wurde dabei nach der ungefähren Größe der in den einzelnen Materialien überwiegend vorkommenden Atomkerne geordnet.

<sup>11</sup> J. H. Noon, M. F. Kaplon u. D. M. Ritson, Phys. Rev. **92**, 1585 [1953].

Material	Verf.	$\lambda$	$p_B^A$	$p_C^A$	$p_{B+C}^A$
Emulsion Stoß an einzel- nen Nukleonen	1	41°	0,83 ± 0,5	0,8 ± 0,5	
	2		0,6		
	3	~ 40°	0,60 ± 0,22		0,5 ± 0,2
Zelluloseacetat	4	55°			0,53 ± 0,17
Emulsion Stoß an leicht- ten Kernen	3	~ 40°	0,22 ± 0,11	0,20 ± 0,18	0,22 ± 0,09
	5	55°	0,29 ± 0,09	0,06 ± 0,06	0,20 ± 0,06
Glas	2	30°	0,23 ± 0,05	0,24 ± 0,07	0,23 ± 0,04
Emulsion Stoß an allen Kernen	1	41°	0,36 ± 0,11	0,34 ± 0,11	
	3	~ 40°	0,17 ± 0,08	0,09 ± 0,09	
	5	55°	0,28 ± 0,07	0,26 ± 0,07	

1. Noon, Kaplon, Ritson<sup>11</sup>; 2. Bradt, Peters<sup>1</sup>;  
3. diese Arbeit; 4. Noon, Kaplon<sup>12</sup>; 5. Gottstein<sup>3</sup>.

Tab. 4. Spaltwahrscheinlichkeiten nach verschiedenen Autoren.

## VI. Das Ladungsspektrum der schweren Kerne am Gipfel der Atmosphäre

Für die Anzahlen  $N_A(h)$ ,  $N_B(h)$  und  $N_C(h)$  der A-, B- und C-Kerne in einer atmosphärischen Tiefe  $h$  gelten bei parallelem Einfall die Gln. (1), (2) und (3) der Arbeit von Gottstein<sup>3</sup>. Mittels dieser Gleichungen kann man aus den am Meßort gefundenen Kernzahlen die Verhältnisse

$$Q = N_B(0)/N_C(0) \text{ und } R = N_A(0)/N_B(0)$$

der B- und C-Kerne bzw. der A- und B-Kerne am Gipfel der Atmosphäre berechnen, wenn man für jedes Teilchen einzeln die von ihm durchlaufene Schichtdicke

$$h = h_0/\cos \Theta + \mu$$

bestimmt. Dabei ist  $h_0 = 20 \text{ g/cm}^2$  die mittlere atmosphärische Tiefe des Plattenpaketes während der Exposition,  $\mu$  die in der Verpackung und der Emulsion bis zur ersten Durchmusterungszeile (s. Einleitung) durchquerte Schichtdicke und  $\Theta$  der Zenitwinkel der Spur. Die von den Kernen im Mittel durchlaufene Schichtdicke ergibt sich zu  $h = 32 \text{ g/cm}^2$  Luftäquivalent.

Da die bei der Berechnung von  $Q$  und  $R$  benötigten Werte der  $p_k^i$  verhältnismäßig unsicher und von den einzelnen Autoren verschieden angesetzt sind, verwenden wir zum besseren Vergleich der Ergebnisse in den mit a) gekennzeichneten Fällen die Spaltwahrscheinlichkeiten nach Bradt und Peters<sup>1</sup>, Gottstein<sup>3</sup> und dieser Arbeit  $p_B^A = 0,23$ ,  $p_C^A = 0,24$ ,  $p_B^B = 0,37$ ,  $p_A^A = 0,29$ ,  $p_B^B = 0,14$ ,  $p_C^C = 0,24$  und in den mit b) gekennzeichneten Fällen die von Kaplon, Noon und Racette<sup>4</sup> angegebenen Spaltwahrscheinlichkeiten  $p_B^A = 0,42$ ,  $p_C^A = 0,48$ ,

$p_C^B = 0,27$ ,  $p_A^A = p_B^B = 0,13$ ,  $p_C^C = 0,25$ . Für die Absorptionsweglängen werden die Werte von Tab. 3 benutzt.

Verwendet man nur die Spuren mit projizierten Winkeln  $\vartheta > 0$  (s. Abschn. III), so erhält man die in Tab. 5 dargestellten Ergebnisse. Der Durchmusterungsverlust an Li-Spuren von 10% wurde berücksichtigt.

Fall	$Q$	$R$
a	2,3 ± 1,0	0,85 ± 0,31
b	2,4 ± 1,1	0,40 ± 0,30

Tab. 5.

In Tab. 6 sind für  $R$  die Ergebnisse anderer Autoren zusammengestellt. Es wurde jedesmal angegeben, welchem der Fälle a) oder b) die von den Autoren zugrunde gelegten Werte der  $p_k^i$  entsprechen.

Verfasser	Exp. Technik	$R$	Fall
Bradt, Peters <sup>1</sup>	Kernemulsion	0,1	a
Dainton, Fowler, Kent <sup>2</sup>	Kernemulsion	1,2	a
		~ 0,6	b
Kaplon, Peters, Reynolds, Ritson <sup>6</sup>	Kernemulsion	0,1	a
Gottstein <sup>3</sup>	Kernemulsion	1,0	a
Kaplon, Noon, Racette <sup>4</sup>	Kernemulsion	0,46 ± 0,15	b
Hourd, Fleming, Lord <sup>5</sup>	Kernemulsion	0,33 ± 0,09	b
Stix <sup>12</sup>	Nebelkammer Zählrohrteleskop	≤ 0,37	

Tab. 6.  $R$ -Werte nach verschiedenen Autoren.

Für  $Q$  (s. Tab. 5) fällt unser Wert etwas kleiner aus als der anderer Autoren ( $Q = 3,0$ ); jedoch liegt die Abweichung innerhalb des statistischen Fehlers.

## VII. Der absolute Fluß der schweren Kerne am Gipfel der Atmosphäre

Es sei  $N_i(\Theta_1, \Theta_2)$  die Zahl der Kerne der Sorte  $i$  mit Zenitwinkeln zwischen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$ , und  $x(\Theta_1, \Theta_2)$  die von diesen im Mittel durchsetzte Schichtdicke.

Wählt man  $\Theta_2 - \Theta_1$  nicht zu groß, so kann man die Kerne als Parallelbündel behandeln und unter Verwendung der Gln. (1), (2) und (3) der Arbeit von Gottstein<sup>3</sup> die Zahl  $N_i^0(\Theta_1, \Theta_2)$  der Kerne im Winkelintervall  $\Theta_1$  bis  $\Theta_2$  am Gipfel der Atmosphäre berechnen. Führt man dies für jedes Intervall einzeln durch, so erhält man nach Summation die Zahl von Kernen  $N_i^0$ , die in einem Platten-

<sup>12</sup> T. H. Stix, Phys. Rev. **95**, 782 [1954].

<sup>13</sup> J. H. Noon u. M. F. Kaplon, Phys. Rev. **95**, 647 [1954].

<sup>14</sup> S. Biswas, B. Peters u. Rama, Proc. Ind. Acad. Sci. A **41**, 154 [1955].

<sup>15</sup> Y. Eisenberg, Phys. Rev. **96**, 1378 [1954].



paket bei Abwesenheit absorbierender Materie registriert worden wären. Also

$$N_i^0 = T \iint J_i(0) A(\Theta, \Phi) \sin \Theta \, d\Theta \, d\Phi$$

oder, da  $J_i(0)$  als isotrop vorausgesetzt wurde,

$$J_i(0) = N_i^0 / T \iint A(\Theta, \Phi) \sin \Theta \, d\Theta \, d\Phi.$$

Hierin ist  $J_i(0)$  die Intensität ( $\text{m}^{-2} \text{ster}^{-1} \text{sec}^{-1}$ ) der Kernsorte  $i$  am Gipfel der Atmosphäre,  $T=7,5$  h die Flugzeit des Ballons und  $A(\Theta, \Phi)$  die Projektion des Plattenpaketes in Richtung  $\Theta, \Phi$  auf eine zu dieser Richtung senkrechte Ebene. Im Falle des Emulsionsblockes mit den Kantenlängen  $a, b$  und  $c$  ist

$$A(\Theta, \Phi) = a b \cos \Phi \sin \Theta + a c \cos \Theta + b c \sin \Theta \sin \Phi.$$

Verwendet man zur Berechnung von  $J_i(0)$  wieder nur die Kerne mit einem projizierten Winkel  $\vartheta > 0$ , so ergibt sich für den Fluß der B- und C-Kerne am Gipfel der Atmosphäre

$$J_B(0) = 2,8 \pm 0,65 \text{ m}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{ster}^{-1}, \\ J_C(0) = 1,2 \pm 0,4 \text{ m}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{ster}^{-1}.$$

Diese Werte sind kleiner als die von Peters et al.<sup>10</sup> und Kaplon et al.<sup>4</sup> bei  $\lambda = 41^\circ$  geomagnetischer Breite erhaltenen Intensitäten (in  $\text{m}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{ster}^{-1}$ ):

$$J_B(0) = 5,8 \pm 0,7 \text{ bzw. } J_B(0) = 7,1 \pm 1,3; \\ J_C(0) = 2,5 \pm 0,5 \text{ bzw. } J_C(0) = 2,6 \pm 0,9.$$

Man könnte daher vielleicht vermuten, daß nicht nur die eine Seite ( $\vartheta < 0$ ) des Emulsionsblockes, sondern auch die andere ( $\vartheta > 0$ ) durch eine Materieschicht unbekannter Dicke abgeschirmt war (s. Abschn. III). Jedoch ist dieser Tatbestand deswegen unwahrscheinlich, weil die fragliche Materieschicht kugelsymmetrisch um die Seite  $\vartheta > 0$  des Emulsionsblockes verteilt gewesen sein müßte, wie sich aus der Übereinstimmung der Flußwerte in den Winkelintervallen  $0 \leq \vartheta < 45^\circ$  und  $45^\circ \leq \vartheta \leq 75^\circ$  ergibt. In Tab. 7 sind unter der Annahme einer solchen kugelsymmetrischen Schicht der Dicke  $h$  (in Luftäquivalent) die dann sich ergebenden Flußwerte zusammengestellt.

Selbst wenn man  $h$  so wählt, daß der Fluß der C-Kerne den von den anderen Autoren gefundenen

Wert  $J_C(0) = 2,5 \text{ m}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{ster}^{-1}$  annimmt, bleibt der Fluß der B-Kerne nach wie vor zu klein.

$h$ g/cm <sup>2</sup>	$J_C(0)$ m <sup>-2</sup> sec <sup>-1</sup> ster <sup>-1</sup>	$J_B(0)$ m <sup>-2</sup> sec <sup>-1</sup> ster <sup>-1</sup>	$Q$	$R_1$	$R_2$
0	1,2	2,8	2,35	0,85	0,4
10	2,1	3,7	1,80	0,68	0,0
20	3,4	4,8	1,40	0,50	< 0

Tab. 7. Flußwerte der schweren Kerne bei Annahme einer Absorption in verschieden starken Materieschichten.

$R_1$  unter Verwendung der  $p_k^i$  von Peters et al.<sup>1</sup>,  $R_2$  unter Verwendung der  $p_k^i$  von Kaplon et al.<sup>4</sup> berechnet.

Es ist beabsichtigt, zur Klärung dieser Frage eine Flußbestimmung in einem anderen Emulsionsblock durchzuführen, der während desselben Ballonfluges exponiert wurde.\*

### VIII. Schlußfolgerungen

Die hier erhaltenen Werte für den absoluten Fluß der Kerne mit  $Z \geq 6$  am Gipfel der Atmosphäre sind etwas kleiner, als sie von anderen Autoren angegeben werden. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß der Grund für den kleineren Fluß in einer zusätzlichen Materieschicht unbekannter Dicke zu suchen ist, die während der Exposition noch über dem Plattenpaket lag, da es keine gemeinsame Schichtdicke gibt, für die der Fluß sowohl der B- als auch der C-Kerne den von anderen Autoren gefundenen Wert annimmt. Auch müßte eine solche Schicht annähernd kugelsymmetrisch gewesen sein. In diesem Falle würde sich allerdings das Verhältnis  $R$  von A- zu B-Kernen am Gipfel der Atmosphäre von den in Tab. 5 angegebenen Zahlen auf höchstens 0,5 bei Gültigkeit der Spaltwahrscheinlichkeiten von Peters, und auf 0,0 bei Gültigkeit der Spaltwahrscheinlichkeiten von Kaplon et al. verringern (s. jedoch Anm. b. d. Korr.\*).

Die Energieverteilung der Primärkerne ist in Übereinstimmung mit dem von Kaplon et al. aus Messungen des Breiteneffektes abgeleiteten Energiespektrum. Die von Dainton et al. gefundenen Abweichungen lassen sich durch kleinräumige Verzerrungen der Emulsion erklären, die einen größeren Streuwinkel und damit eine kleinere Energie als die wirkliche vortäuschen. Es wird gezeigt, daß

\* Anm. b. d. Korr.: Inzwischen wurde in einem zweiten, während desselben Ballonfluges exponierten Emulsionsblock, der in einem getrennten Behälter und mehrere Meter vom ersten Emulsionsblock entfernt am Lastseil aufgehängt war, der Fluß der Kerne mit  $Z \geq 6$  gemessen. Das Ergebnis ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem früher für  $\vartheta > 0$  erhaltenen Wert. Es besteht also kein Anlaß mehr für die Annahme, daß die für  $\vartheta > 0$  erhaltenen Flußwerte durch eine zusätzliche, unbekannte Materieschicht beeinflusst worden sind.

die Zellenlänge zur Messung von Energien  $> 5 \text{ GeV/Nukl.}$  mindestens  $4000 \mu$  betragen muß. Nur aus Messungen an Spuren länger als  $20 \text{ mm}$  pro Emulsionsschicht kann daher das Energiespektrum bis zu Energien von  $5 \text{ GeV/Nukl.}$  richtig erhalten werden.

Herrn Prof. Dr. K. Wirtz danke ich für die freundliche Aufnahme im Max-Planck-Institut für Physik, Herrn Dr. K. Gottstein für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen und den Beobachterinnen für die mühevollen Arbeit beim Durchmustern der Platten. Die Mikrophotographien wurden von Frau H. Baumbach angefertigt.

## Zum Zusammenhang zwischen S-Matrix und Normierungsintegralen in der Quantenmechanik

VON GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 581—584 [1955]; eingegangen am 11. Juni 1955)

Durch Untersuchung der Schrödinger-Gleichung für die S-Zustände eines spinfreien nicht-relativistischen Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential endlicher Reichweite wird gewonnen: 1. eine neue Ableitung des Zusammenhangs zwischen Residuum der S-Matrix an den gebundenen Zuständen zugeordneten Polen und dem Normierungsintegral der Wellenfunktion; 2a) für Streuzustände ein Zusammenhang zwischen Änderung der S-Matrix mit der Wellenzahl und dem innerhalb der Reichweite liegenden Teil des Normierungsintegrals; 2b) eine hieraus folgende Ungleichung, die kürzlich von Wigner angegeben wurde.

Nach Kramers<sup>1</sup> bestimmen die Pole und Nullstellen der S-Matrix  $S(k)$  auf der imaginären  $k$ -Achse die stationären Zustände des betreffenden quantenmechanischen Systems. Es konnte überdies gezeigt werden<sup>2</sup>, daß das Residuum von  $S(k)$  an den Polen ( $k = +i\kappa_n$ ) bzw. der Wert von  $dS(k)/dk$  an den Nullstellen ( $k = -i\kappa_n$ ) mit dem Normierungsintegral der Wellenfunktion des stationären Zustandes in einfacher Weise zusammenhängt. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Verallgemeinerung dieses Resultats abgeleitet [Gl. (20)], und zwar durch unmittelbare Untersuchung der Änderung der Lösung der Schrödinger-Gleichung bei differentieller Änderung der Wellenzahl  $k$ . Durch Spezialisierung wird hieraus einerseits der bereits bekannte Zusammenhang zwischen S-Matrix und Normierungsintegral für stationäre Zustände gewonnen [Gl. (22)], andererseits wird für endliche Reichweite  $r_0$  des Wechselwirkungspotentials ein bisher anscheinend nicht

mitgeteilter Zusammenhang zwischen der Änderung von  $S(k)$  auf der reellen  $k$ -Achse und dem Anteil des Normierungsintegrals innerhalb der Reichweite erhalten [Gl. (25)]. Diese neue Beziehung ist von Interesse bei der physikalischen Diskussion sogenannter quasistationärer oder zerfallender Zustände. Sie führt ferner unmittelbar zu einer kürzlich von Wigner<sup>3</sup> angegebenen Ungleichung.

Die Untersuchung soll beschränkt werden auf die S-Zustände (Drehimpuls null) nicht-relativistischer spinfreier Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential endlicher Reichweite<sup>4</sup>. Statt des asymptotischen Verhaltens der Wellenfunktion darf daher ihr Verhalten außerhalb der Reichweite  $r_0$  betrachtet werden. Das Potential soll frei von Singularitäten sein. Drückt man, wie üblich, die Wellenfunktion  $\psi(r)$  durch

$$u(r) = r\psi(r) \quad (1)$$

<sup>1</sup> H. A. Kramers, unveröffentlicht; zitiert in den in Anm.<sup>2</sup> genannten Arbeiten.

<sup>2</sup> W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **1**, 608 [1946]; C. Möller, Dan. Mat. Fys. Medd. **22**, No. 19 [1946].

<sup>3</sup> E. P. Wigner, Phys. Rev. **98**, 145 [1955].

<sup>4</sup> Man vermeidet so die „überzähligen Nullstellen“. Es scheint aber, daß die Funktion  $S(k)$  [ebenso wie die weiter unten definierten Funktionen  $a(k)$  und  $b(k)$ ] dann grundsätzlich eine wesentliche Singularität bei  $k = \infty$  besitzt. Obwohl dem Verf. ein strenger Beweis

nicht gelungen ist, dürfte die Behauptung folgendermaßen plausibel gemacht werden können: 1. einfache Beispiele (z. B. Kastenpotential) liefern stets ein  $S(k)$  [ $a(k)$ ,  $b(k)$ ], das meromorph, aber nicht rational ist; 2. die von V. Bargmann\* untersuchten rationalen  $S(k)$  führen zu Potentialen mit unendlicher Reichweite; 3. das Versagen der Bornschen Näherung für  $|k| = \infty$  ( $k$  jedoch mit nicht-verschwindendem Imaginärteil) deutet auf eine wesentliche Singularität hin.

\* V. Bargmann, Rev. Mod. Phys. **21**, 488 [1949].